統計分析シリーズ (V)

茨城大学教授　所　一夫

V　統計的仮説の検定

1.　仮説検定の問題

前号の例で某高校の発表によると，全志願者の得点は大体正規分布と見られ，その平均は275点，標準偏差は22.5点であり，このとき某中学からの受験者は9人で，その9人の得点の平均は253点にしかならなかった事が示された。

この結果に対して「この中学は全体と比べて劣っていると判断できるか。」という問題が今回の問題である。

推計学の考えが無かった時代には，全体の平均が275点，この中学の平均は253点であるから，この中学は劣っているに決まっていたのであった。しかし私達の考えでは試験の点数は能力を示す母集団の一つの標本値であり，したがって能力はあっても時には点数が低いこともあると考えるべきであるので，その標本平均が全体の平均よりも少し低いからといって必ずしもこの中学は全体の水準よりも低いと判定することはできないであろう。(またできるかも知れない。）このような問題を調べるのが統計的仮説の検定の問題である。

2.　検定の方法

上の問題に対し次のように考える。もしこの中学が全体と同一水準の学力を持っていると仮定する。すなわちその母集団は　N (275, 22.5^2) であるとする。(この仮定を帰無仮説という。）そしてこの帰無仮説が正しいと仮定した場合に，実際に大きさ9の標本を抽出してその平均を作れば（その平均は母平均275となるとはかぎらなくて）種々の値をとるであろうが，ここの場合のように253点とかそれ以下の値となる（このことをより偏る範囲にはいると言う）ような事はどの程度起こると考えられるかを調べる。

この計算は前号で述べたように，標本平均$\overline{x}$の分布が$N(M, S^2/n)$であるからそのような事の起こる確率が正規分布の表（統計分析シリーズⅢ）から算出できる。

すなわち上の場合は$N(275,\ 22.5^2/9)$ すなわち$N(275,\ 7.5^2)$の分布で253以下の値をとる確率であるから，分布の対称性によってこの確率は（$253=275-22$より）$275+22=297$　以上の値をとる確率であり，

$f(a)=f\{(297-275)/7.5\}\fallingdotseq f(2.93)\fallingdotseq f(3)=0.499$

より求める確率は$0.5-0.499=0.001$とわかる。

この事はこの中学の9人が一般水準であっても，このように低い点数をとる事も起こり得るけれども，そのような事の起こる確率は0.1％ぐらいのものである事を示している。そこで「この中学の点数の母集団は一般水準（平均275）ではない。」と判断すれば，この判断は誤ることもある。（何となれば，一般水準であっても，ごく稀にはこのように低い点数をとる事もあり得るから。）しかし上の計算によってその判断が誤る確率は0.1％ぐらいと言えるのである。

ここで人間が行なう判断であるから，「ある程度の誤りは許す。」という事であれば，たとえば上例の場合には0.1%ぐらいの誤りは許すという事になればこの9人の点数の結果から「この中学は一般水準より劣る。」と判断が下せるわけである。

この判断では0.1%ぐらいの判断の誤りは許すという事であったが，一般にその判断の誤りの許し得べき最大限を**有意水準**といい普通5％，慎重を要する場合には1％を採っている。そして与えられた有意水準のもとで上のように帰無説仮が否定（棄却）されて判断が下せた場合を「検定は有意である。」という。

以上の判断をまとめると，まず予想とは反対の帰無仮説をつくり，その仮説のもとに，標本値より算出した値（たとえば$\overline{x}$）が実際に得られた値およびより偏る範囲にはいる確率を算出して，これが有意水準より小さければ「検定は有意である。」として帰無仮説を棄てて結論を出すのである。

この場合，もし上の確率が有意水準より大であれば，その帰無仮説を棄てると，その判断は有意水準以上の確率で誤りを犯す危険性があるので帰無仮説は棄却できない。しかしこの事は「帰無仮説が正しい」と判断したわけではない事を注意しておかなければならない。すなわち有意とならない場合は調査した資料のみからは「結論が出ない。」のである。次に整理した形で他の例を示そう。

3. Sが未知の場合の母平均の検定

前例では　S＝22.5　とわかっていたが，もしこれが未知で標本値

(290，280，275，260，255，243，237，220，210)

が正規型母集団からの標本である事だけしかわからない場合に，これらが母平均が275の母集団（一般水準）からの標本と見られるか否かを有意水準5％で検定して見よう。

$\overline{x}$＝253となるから，おそらくこの標本はN(275，S^2)からの標本とは見られないだろう，との予想より，帰無値説として「この標本はN（275，S^2）からの無作為標本である」を採る。

この場合には標本より算出した

$$t=(\overline{x}-M)\sqrt{n-1}/s$$

の分布を考える。この分布は前号のt分布であるが，実際の計算値は前号の計算より

$$\overline{x}=253,\ M=275,\ \sqrt{n-1}/s=\sqrt{72/5376}=0.115$$

$$t=(253-275)\ 0.115=-2.53$$

である。この場合のより偏る範囲は　$|t|>2.53$　であるが，この確率は，自由度　$n-1=9-1=8$のt 分布表より　$|t|>2.306$　となる確率が5％であるから，今の場合のように（2.53＞2.306より）$|t|>2.53$　となる確率は5％より小となる。故により偏る範囲にはいる確率が有意水準5％より小さく，検定は有意となり帰無仮説は棄却される。すなわちこの9人の母集団は一般水準ではないと判定できるのである。

4. 検定と区間推定

上の理論により，前例の9人の中学生の点数によって代表された能力を示す母集団は有意水準5％で「一般水準M＝275と異なる。」と判定されたのであるが，この問題については前号で，この中学生の母集団の母平均Mは信頼係数95％で（233，273）の範囲内にあると算出されている。

これはMの真の値が上の信頼区間内にある確率が95％であると言う意味であるから，実際にはこの区間外にあるかも知れない。したがってMが（233，273）内にあると判断すればその判断は誤るかも知れないがそれが誤る確率は　1－0.95＝0.05　以下におさえられる事を示している。今の例の場合は一般水準の母平均は275で上の範囲外の値になっている。したがって「この中学における母平均が範囲（233，273）外の275ではない」と判断してもその判断の誤る確率は5％以下となる。この事から「この中学の母集団は一般水準M＝275である」という帰無仮説を棄却してもその判断の誤る確率は有意水準5％以下となり検定は有意となる事がわかる。

この考え方は，ここでは前例について考えたが，どの場合でも同様で，もし信頼係数95％でその信頼区間が算出されるならば，その区間外の数値をとる事を帰無仮説とした検定は有意となり，その区間内の数値をとる事を帰無仮説とした検定は有意とならないのである。

例　前出（Ⅱ）の，ある町で試食したコシヒカリの米飯の味について採点したA，B，C，D4地区96人の点数は次のとおりであった。

評点	−3	−2	−1	0	1	2	3	計
人数	1	5	18	8	24	36	4	96

これらの点数を標本値と見て標本平均$\overline{x}$と標本標準偏差sを求めると，近似値として$\overline{x}$＝0.8，s＝1.44となる。

このsは標本から求めたもので母集団標準偏差Sとは異なるが，標本の大きさ　n＝96　がかなり大きくsはSに近いと見られるのでS＝1.44とする。

このとき標本調査の理論により，$\overline{x}$の分布は正規分布に近く，また母集団は十分大であると考えてよいのでその標準偏差s（$\overline{x}$）は次のようになる。

$$s(\overline{x})=S/\sqrt{n}=1.44/\sqrt{96}=0.144$$

したがって信頼係数95％での信頼区間

$(\overline{x}-2s(\overline{x}),\ \overline{x}+2s(\overline{x}))$　は

$(0.8-2\times0.144,\ 0.8+2\times0.144)$

すなわち（0.5，1.1）となる。

そこでこの試食の結果，コシヒカリの米飯は「おいしいと言えるか。」という問に対して，仮説検定の答を次のように出せる事がわかる。すなわち帰無仮説として「これらの点数の母平均は0である。」すなわち「味は普通である。」を採ったとき，有意水準5％でこの帰無仮説が棄てられるか否かを調べると，信頼係数95％の信頼区間（0.5，1.1）の中に帰無仮説によって示されたM＝0がはいっていない事より，この検定は有意となり「味は普通である。」との帰無仮説は棄てられる。したがって$\overline{x}>0$より「コシヒカリの米飯はおいしい。」と判断してよいのである。

5. 比率の検定

以上の考えは比率に関する検定にも適用できる。いま母集団から標本を抽出して調べた結果から母集団における比率がa％と見られるか否かを有意水準5％で検定しようと思う。これに対しては標本より信頼係数95％の信頼区間を算出して，この区間内に目標のa％がはいっていなければ検定は有意となり，「母集団比率はa％ではない。」と結論が出せるし，はいって居れば有意とならず結論は出せないのである。