統計分析シリーズ(Ⅶ)

茨城大学教授　所　一夫

Ⅶ　カイ2乗検定（Ⅱ）

1.　一様性（等比率）検定

	K	L	M	計
A	8	11	5	24
B	25	30	10	65
C	10	7	13	30
D	7	5	12	24
計	50	53	40	143

左表は某教官によるある科目の評点A，B，C，Dの人数をK，L，M学部別に示したものである。この表よりK，L，M学部間における各評点の割合は一般に異なるものと思われるか。

以上のような問題が一様性検定と呼ばれるものである。内容は各学部の数多い学生を母集団と考えたときに各母集団内にA，B，C，Dの評価に相当する学生が居るが，それらの比率はK，L，M学部間で同一と見られるか否かを各学部から大きさ50，53，40のランダムサンプルを抽出して調べる事により検定して見ようとするものである。

この検定の結果，比率が同一と見られるならば各学部間に優劣は認められないし，同一と認められなければ各学部は評点に関しては異質のものと判定されるわけである。

2.　検定の方法

帰無仮説としては「各学部間でA，B，C，Dの評価を受ける学生の比率は等しい」を採用する。

この場合もしこの帰無仮説が正しいならば，各学部からそれぞれ50人，53人，40人を抽出した場合に各学部内でA，B，C，Dの評価を受ける学生は何人ずつと期待されるかを示す理論度数は次のように計算される。すなわち各学部でA，B，C，Dの比率が等しいならばそれらの比率は，総計143人のうちAが24人，Bが65人，Cが30人，Dが24人居る事よりそれらの比率は，24/143，65/143，30/143，24/143と推定される。したがってK学部の50人に対しては理論度数は

Aは　$50\times\frac{24}{143}\fallingdotseq 8.4$　　Bは　$50\times\frac{65}{143}\fallingdotseq 22.8$

Cは　$50\times\frac{30}{143}\fallingdotseq 10.5$　　Dは　$50\times\frac{24}{143}\fallingdotseq 8.4$

同様にL学部では

Aは　$53\times\frac{24}{143}\fallingdotseq 8.9$　　Bは　$53\times\frac{65}{143}\fallingdotseq 24.1$

Cは　$53\times\frac{30}{143}\fallingdotseq 11.1$　　Dは　$53\times\frac{24}{143}\fallingdotseq 8.9$

M学部についても同様に

Aは　$40\times\frac{24}{143}\fallingdotseq 6.7$　　Bは　$40\times\frac{65}{143}\fallingdotseq 18.2$

Cは　$40\times\frac{30}{143}\fallingdotseq 8.4$　　Dは　$40\times\frac{24}{143}\fallingdotseq 6.7$

となる，これらの結果を次表の括弧内に示す。

ここで帰無仮説が正しいならば調査して得られた標本値はこれらの理論度数に近い数値をとると思われるが，

	K	L	M	計
A	8(8.4)	11(8.9)	5(6.7)	24
B	25(22.8)	30(24.1)	10(18.2)	65
C	10(10.5)	7(11.1)	13(8.4)	30
D	7(8.4)	5(8.9)	12(6.7)	24
計	50	53	40	143

いま調べた標本値についてはどうであろうかという問題である。このように考えるとこれは前号と同様に理論度数と標本から得られた度数との間の適合度検定と同じである事に気付くであろう。

したがってこの表から χ_0^2を計算すると

$$\chi_0^2=\frac{(8-8.4)^2}{8.4}+\frac{(25-22.8)^2}{22.8}+\frac{(10-10.5)^2}{10.5}+\frac{(7-8.4)^2}{8.4}+\frac{(11-8.9)^2}{8.9}+\frac{(30-24.1)^2}{24.1}+\frac{(7-11.1)^2}{11.1}+\cdots\cdots+\frac{(12-6.7)^2}{6.7}\fallingdotseq 16.6$$

となる。

次にこの場合の自由度nは周辺の計の欄の数字が定められている場合に何個の欄の数字が自由に採れるかを示すものであるから，上の場合には $(4-1)\times(3-1)=6$ としなければならない。

自由度6の χ^2 分布で χ^2 が上に算出した $\chi_0^2=16.6$ 以上の値をとる確率を調べると，前号のχ^2分布の表より，

χ_6^2 (0.05) $=12.59$ で

($\chi^2\geqq\chi_6^2$ (0.05) $=12.59$) となる確率が5％であり，

$\chi_0^2=16.6>\chi_6^2$ (0.05) $=12.59$　であるから $\chi^2\geqq 16.6$ となる確率は5％より小となり，もし有意水準を5％とすればこの有意水準で検定は有意となる。

したがって帰無仮説は棄てられて「各学部内でA，B，

C，Dは同一比率ではない」と判定してもこの判定の誤まる確率は5%以下であることが保証されたわけである。

もしこの場合検定の結果が有意とならなければ，帰無仮説は棄てられなく，標本度数が理論度数と異なって居てもそれは，母集団では同一比率であってもランダムサンプルのバラツキのために生じた結果かも知れないと考えなければならないものであろう。

3. 無相関検定

ある病気にかかっか事のある者（これを母集団と考える）の中からランダムに50人を抽出し，それらの者についてAという療法を受けた者の数を調べた結果30人居り，この療法を受けない者は20人であった。

またこの療法を受けた30人の中で早くなおった（3週間以内で全快した）者は18人で，長びいた（3週間より長くかかった）者は12人であった。

この療法を受けなかった者20人については早くなおった者は6人で長びいた者は14人であった。これらの結果

	早くなおった者	長びいた者	計
A療法を受けた者	18(14.4)	12(15.6)	30
受けない者	6(9.6)	14(10.4)	20
計	24	26	50

を表示したのが上表である。

いま上表より「Aという療法はこの病気に有効であると判定できるかどうか」という事を調べようとするものである。それはこの療法が「早くなおる」事と「長びく」事とに関係があると見てよいか否かを検定しようとするものでこの種の問題を無相関検定という。

この問題についてもカイ2乗検定法が用いられる。すなわち帰無仮説として「この療法は早くなおるか否かには関係がない」を採る。

その場合この病気にかかった者50人中早くなおった者が24人，長びいた者が26人であるから，それがA療法に無関係とすればこの療法を受けた者30人に対しては早くなおる者と長びく者との理論度数は

$$30\times\frac{24}{50}=14.4 \qquad 30\times\frac{26}{50}=15.6$$

となり，この療法を受けない者に対して早くなおる者と長びく者との理論度数は

$$20\times\frac{24}{50}=9.6 \qquad 20\times\frac{26}{50}=10.4$$

となる。これらを前出の表の括弧内に示した。

標本度数は前表のとおりであるから，そのくらいちがいを表わす χ_0^2の値は

$$\chi_0^2=\frac{(18-14.4)^2}{14.4}+\frac{(12-15.6)^2}{15.6}+\frac{(6-9.6)^2}{9.6}+\frac{(14-10.4)^2}{10.4}\fallingdotseq 4.33$$

である。

この場合の自由度は周辺の数値が定められたとき欄内の数値のうちで任意にとる事のできる欄の数であるから

$n=(2-1)\times(2-1)=1$ である。

次に自由度1のχ^2分布では前号の表よりχ_1^2 (0.05) $=3.842$であり，この場合の $\chi_0^2\fallingdotseq 4.33$ で，

$\chi_0^2>\chi_1^2$ (0.05) であるから，$\chi^2\geqq\chi_0^2=4.33$

となる確率は5%よりも小さい。すなわちより偏る範囲には入る確率は5%より小さく，有意水準を5%とすればこの検定は有意となる。すなわちはじめの帰無仮説は棄てられて「病気が早くなおるか否かはA療法と関係がある」という結論が出され，その療法はその病気に対して有効である事が判断されたものである。

しかしこの検定法では「無効ではない」事を判定したものであって，どの程度有効であるのかその程度には触れて居ない事を注意しておかなければならない。また検定が有意とならない場合については前例と同様に考えなければならない。

以上一様性検定と無相関検定について述べたが，これらについては母集団の考え方はそれぞれ異なって居るけれども検定の方法は全く同じカイ2乗検定が用いられるものであり，しかもその考え方は前号の適合度検定の考えによるものであることが理解されよう。

4. おわりに

7回にわたって推計学の考え方およびその技法について紹介して来たが，すべての統計問題が推計学によって解かれるのではない。推計学は確率判断を示して居るに過ぎないのであるから確率判断が用いられない場合（たとえば一個人についての問題とか，人権に関する問題など）には用をなさないのである。新しく発展した学問であるために過大評価をしたり，結果を過信したりしないように特に注意を付け加えて筆を置こう。

(1974年1月)

統計ニュース

—— 1月の行事 ——

○24～29日　農業基本調査員指導会
○23日　人口統計解析研究会
○29日～30日　統計実務研修会