〈付　録〉

＜付　録＞

行列計算

1.　行列の定義と用語

次のように，数を長方形に並べたものを，行列（マトリックス）という。行列を表わすには，長方形に並べた数の両側に（　）をつける。また，この行列を作っている１つ１つの数を，この行列の要素という。

行列の長方形に並んでいる数の横の並びを行，縦の並びを列といい，それぞれ上及び左から第１行・第２行あるいは第１列・第２列というように呼ぶ。

$$
\begin{array}{cl}
\begin{pmatrix} 4 & 2 & 8 & 6 \\ 1 & 5 & 3 & 4 \\ 2 & 9 & 0 & 5 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \cdots\cdots\cdots\text{第１行} \\ \cdots\cdots\cdots\text{第２行} \\ \cdots\cdots\cdots\text{第３行} \end{array} \\
\begin{array}{cccc} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \text{第} & \text{第} & \text{第} & \text{第} \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ \text{列} & \text{列} & \text{列} & \text{列} \end{array} &
\end{array}
$$

上の例は要素がすべて定数の行列であるが，行列の要素は定数とは限らず，変数であってもよい。

ある行列の行及び列の数がそれぞれm及びnであるとき，この行列を（$m\times n$）型あるいは（m, n）型行列という。したがって，上に示した行列は（３×４）型あるいは（３，４）型行列である。

行列を１個の文字で表わすことがある。その場合は，普通アルファベットの大文字を用い，その要素は，次のように表現する。例えば，行列A の第i行，第j列の位置にある要素は，A の小文字aを用いて

$$a_{ij}$$

と示す。そして，これを行列Aの（i，j）の要素という。

したがって，この行列Aが（$m\times n$）型行列ならば

$$
A = \begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{23} \cdots\cdots\cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} \cdots\cdots\cdots & a_{2n} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} \cdots\cdots\cdots & a_{3n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & a_{mn}
\end{pmatrix}
$$

となる。

また，行列Aを（a_{ij}）と表わすこともある。

2.　特殊な形の行列

行列はその形によっていろいろな名称が付けられているが，次に特に重要な正方行列及びベクト

ルなどについて説明する。

(1) 正方行列

行及び列の数が等しい行列，即ち要素が正方形に並んでいる行列を，正方行列という。

正方行列には，その形から，次のような特別な名称で呼ばれているものがある。

① 対角行列

次のように，左上より右下にいたる対角線上の要素以外の他の要素がすべて0のものを，対角行列という。対角線上の要素に0のものがあってもかまわない。

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

② 単位行列

対角行列で，対角線上の要素がすべて1のものを，単位行列という。この行列は，通常 I で表わされる。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) ベクトル

ただ1行あるいは1列より成る行列を，特にそれぞれ行ベクトル及び列ベクトルという。次がその例である。

行ベクトル $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 8 & 6 \end{pmatrix}$

列ベクトル $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

3. 行列の演算

(1) 加減算

行列の演算には，いろいろな約束がある。行列の加減算は，型の等しい行列についてのみ行われる。

行列 A に別の行列 B を加えるということは，この2組の行列の（i，j）要素の和，即ち（$a_{ij}+b_{ij}$）をあらたに（i，j）要素とする行列を作ることをいい，これを $A+B$ と表わす。同様に，行列 A から行列 B を引くとは，この2個の行列の（i，j）要素の差，即ち（$a_{ij}-b_{ij}$）をあらたに（i，j）要素とする行列を作ることをいい，これを $A-B$ と表わす。

例えば，A 及び B を

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 5 & 4 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 8 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

とすれば，$A+B$ 及び $A-B$ は次のようになる。

$$A+B=\begin{pmatrix} 3+2 & 9+5 \\ 5+1 & 4+8 \\ 7+4 & 0+6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 14 \\ 6 & 12 \\ 11 & 6 \end{pmatrix}, \quad A-B=\begin{pmatrix} 3-2 & 9-5 \\ 5-1 & 4-8 \\ 7-4 & 0-6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & -4 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$$

(2) 乗　算

行列の掛け算では，掛けられる方の行列の列の数と，掛ける方の行列の行の数が等しいことが必要である。今ある行列 A に別の行列 B を掛けることとし，A を（l，m）型行列，B を（m，n）型行列とする。

さて，行列 A に行列 B を掛けるとは，次の数値

$$\sum_{s=1}^{m} a_{is}\cdot b_{sj}$$

を，その（i，j）要素とする行列を作ることをいい，これを AB を表わす。AB は（l，n）型行列になる。

例えば，A 及び B を

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 1 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

とすれば，行列 A の列数（＝2）と行列 B の行数（＝2）は等しいので掛け算可能であり

$$AB=\begin{pmatrix} 8 & 28 & 60 & 100 \\ 4 & 11 & 18 & 26 \\ 6 & 21 & 45 & 75 \end{pmatrix}$$

と（3，4）型の行列になる。ここで（2，3）要素18の計算は次のように行われた結果である。

$$18=(2\times 7)+(1\times 4)$$

A 及び B が共に正方行列の時，AB も，BA も型の等しい正方行列となるが，結果は必ずしも等しくない。

例えば，A，B を

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とする時，AB 及び BA はそれぞれ次のようになる。

$$AB = \begin{pmatrix} 8 & 28 \\ 4 & 11 \end{pmatrix} \qquad BA = \begin{pmatrix} 18 & 21 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

行列の掛け算が，通常の数の掛け算と最も異なる点は，この交換の法則が成りたたないことである。したがって，掛け算を行う場合は，掛ける順序に注意する必要がある。

A を任意の正方行列とする時，次の式が常に成り立つ。

$$AI = A \quad , \quad IA = A$$

ただし，I は単位行列とする。もちろん，この単位行列 I は，掛け算が行えるように，行数及び列数を定めておく必要がある。

なお，行列の掛け算では，結合の法則及び分配の法則が成り立つ。即ち行列 A，B，C に関して，次の式が成り立つ。

結合法則　$(AB)C = A(BC)$

分配法則　$A(B \pm C) = AB \pm AC$

$(B \pm C)A = BA \pm CA$

ただし，これら式中の行列 A，B，C は，それぞれの式において演算ができるような型のものでなければならない。

(3) 行列と数との乗算

行列と数との間には，掛け算だけが考えられる。ある行列をある数で割ることは，その数の逆数を掛けるということであるから，これは，掛け算として行うことができる。

行列 A とある数 K との掛け算とは，行列 A の各要素に K を掛けることをいい，KA と表わす。したがって

$$KA = K(a_{ij}) = (Ka_{ij})$$

となる。例えば，A 及び K を

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 8 & 6 \\ 1 & 5 & 3 & 4 \\ 2 & 9 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$K = 2$$

とすれば

$$KA = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 16 & 12 \\ 2 & 10 & 6 & 8 \\ 4 & 18 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

となる。

4. 連立 1 次方程式

行列を用いて，連立 1 次方程式を表わしてみよう。

連立 1 次方程式の一般形式を示すと，次のとおりである。

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots\cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots\cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

ここで x は未知数を示す。この連立 1 次方程式は，行列を用いて，次のように表わすことができる。

$$AX = B \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

ただし，ここで，A，X，B は次のような行列である。

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

である。

例えば，次の連立 1 次方程式

$$\begin{cases} 0.71x_1 + 1.51x_2 + 8.33x_3 = 5.12 \\ 7.77x_1 + 5.52x_2 - 2.12x_3 = 0.82 \\ 4.42x_1 + 5.57x_2 + 1.62x_3 = -6.73 \end{cases}$$

は，行列を用いて，次のように表わすことができる。

$$\begin{array}{ccccc} A & & X & & B \\ \begin{pmatrix} 0.71 & 1.51 & 8.33 \\ 7.77 & 5.52 & -2.12 \\ 4.42 & 5.57 & 1.62 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 5.12 \\ 0.82 \\ -6.73 \end{pmatrix} \end{array}$$

5. 連立１次方程式の解法

(1)式の両辺に行列 A の逆行列 A^{-1} を左から掛けて

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

となり，これを整理すると

$$X = A^{-1}B$$

となる。これが連立方程式の解である。

例えば，前項の例で，A の逆行列 A^{-1} を求めると（逆行列の求め方は省略）

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0.14944 & 0.31654 & -0.35421 \\ -0.15814 & -0.25688 & 0.47698 \\ 0.13598 & 0.01959 & -0.05627 \end{pmatrix}$$

となるから，X は

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 3.40853 \\ -4.23039 \\ 1.09098 \end{pmatrix}$$

と求められる。

茨城県経済の構造

昭和55年茨城県産業連関表

昭和59年３月発行

編集・発行　茨城県企画部統計課

59．3　㈲双葉軽印刷所